Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

ПРАКТИКУМ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Уравнения колебаний и диффузии

Методические указания

Омск –2005

Составители: Г. А. Троценко, О. Г. Жукова, М. В. Мендзив

Практикум предназначен для методического обеспечения практических занятий по новому годовому курсу “Уравнения математической физики” для студентов специальности 071100 “Динамика и прочность машин”. Содержит решения типовых задач, набор задач для самостоятельного решения с ответами.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

Редактор С.Г.Восканян
Сводный темплан 2005 г.
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Тема 1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

1.1. Поток векторного поля. Формула Гаусса – Остроградского

Решение типовых задач

1. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z\vec{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

Решение. Пусть задано векторное поле

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \quad (1.1)$$

Потоком Π поля $\vec{F}$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали n к поверхности S, называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint\limits_S F_n \, dS, \text{ где } F_n = \vec{F} \cdot \vec{n}.$$

Если поверхность S задается уравнением $z = z(x, y)$, то поверхностный интеграл приводится к двойному интегралу по формуле (см. [1], 1.1, 1.2)

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{\mathcal{D}_0} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dx\, dy, \quad (1.2)$$

где $\mathcal{D}_0$ – проекция поверхности S на плоскость xOy.

В данном случае имеем

– уравнение плоскости S: $x + y + z - 1 = 0$;

– нормальный вектор плоскости: $\vec{N}\{1, 1, 1\}$;

– единичный вектор нормали: $\vec{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Тогда $$F_n=(y-x)\frac{1}{\sqrt{3}}+(x+y)\frac{1}{\sqrt{3}}+z\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2y+z}{\sqrt{3}}.$$

Вычисляем поток, применяя формулу (1.2), $dS=\sqrt{3}\,dx\,dy$, $\mathcal{D}_0$ – треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$.

$$\Pi=\iint\limits_S\frac{2y+z}{\sqrt{3}}\,dS=\iint\limits_{\mathcal{D}_0}\frac{2y+(1-x-y)}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{D}_0}(1-x+y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1-x+y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left[(1-x)^2+\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx=\frac{1}{2}.$$

2. Найти поток векторного поля $\vec{F}=x^2\,\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$ через замкнутую поверхность S: $z=x^2+y^2$, $z=1$, $x=0$, $y=0$, лежащую в первом октанте (нормаль внешняя).

Решение. Поток векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по области $\mathcal{D}$, ограниченной поверхностью S

$$\iint\limits_S F_n\,dS=\iiint\limits_{\mathcal{D}}\operatorname{div}\vec{F}\,dV. \qquad (1.3)$$

Дивергенция гладкого векторного поля (1.1) вычисляется по формуле

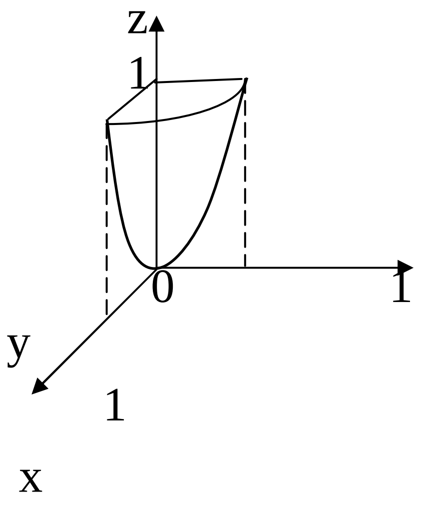
$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Формула (1.3) называется формулой *Гаусса – Остроградского*.

Найдем дивергенцию данного поля $\vec{F}$:

$$\operatorname{div}\vec{F} = 2x + 0 + x = 3x.$$

Искомый поток найдем по формуле (1.3). При вычислении интеграла используем цилиндрические координаты: $x = \rho\cos\varphi$,



$y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$).

$$\Pi = \iiint\limits_D 3x\,dv = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 3\rho^2\cos\varphi\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^1 dz =$$

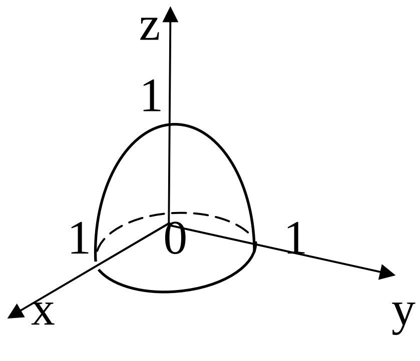
$$= 3\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\left(1-\rho^2\right)d\rho =$$

$$= 3\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

3. Найти поток векторного поля $\vec{F} = xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность S, ограниченную сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостью $z=0$ $(z \ge 0)$.

Решение. Имеем

$$\Pi = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(z+z+2z\right)dv = 4\iiint\limits_{\mathcal{D}} z\,dv.$$



Тройной интеграл вычисляем в сферических координатах:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,$$

$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta,$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

$$\Pi = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho\ \cos\theta\ \rho^2 \sin\theta\ d\rho = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\ d\theta\ \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos 2\theta\bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}$ в точке M:

а) $\vec{F} = \left(xy + z^2\right)\vec{i} + \left(yz + x^2\right)\vec{j} + \left(zx + y^2\right)\vec{k}, \quad M(1, 3, -5);$

б) $\vec{F} = xy^2\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}, \quad M(1, -1, 3).$

2. Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через часть плоскости S, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz):

а) $\vec{F} = (x - 3z)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (4x + y)\vec{k}, \quad S: x + y + z = 2;$

б) $\vec{F} = 8x\,\vec{i} + 11y\,\vec{j} + 17z\,\vec{k}, \quad S:\ x + 2y + 3z = 1.$

3. Вычислить двумя способами (непосредственно и по формуле Гаусса – Остроградского) поток векторного поля $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + x\,y\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями $z^2 = x^2 + y^2, \quad z = 4$ (нормаль внешняя).

4. Найти поток векторного поля $\vec{F}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя):

а) $\vec{F} = x\,y^2\,\vec{i} + x^2\,y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0,\ \ z = 1, \\ x = 0,\ \ y = 0\ \ (1\ \text{октант}). \end{cases}$

б) $\vec{F} = y\,\vec{i} + 2yz\,\vec{j} + 2z^2\,\vec{k}, \quad S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$

в) $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \text{ (1 октант).} \end{cases}$

г) $\vec{F} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$, $\quad S: \begin{cases} 2x + y + 2z = 2, \\ x = 0, \; y = 0, \; z = 0. \end{cases}$

Ответы

1. а) -1; б) 29. **2.** а) $\frac{28}{3}$; б) 1. **3.** 64π.

4. а) $\frac{3\pi}{8}$; б) π; в) $\frac{3\pi}{16}$; г) $\frac{1}{3}$.

1.2. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛА СТОКСА

Решение типовых задач

1. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$ по окружности $L: x^2 + y^2 = 4, \quad z = 3$ в положительном направлении.

Решение. Пусть задано векторное поле (1.1) и замкнутая кусочно-гладкая кривая L с указанным на ней направлением. Криволинейный интеграл второго рода

$$C = \int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} \tag{1.4}$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{F}$ вдоль кривой L.

В данном случае: т. к. при возрастании параметра t от 0 до 2π движение по окружности происходит против хода часовой стрелки относительно единичного вектора $\vec{k}\{0, 0, 1\}$, то параметрические уравнения ориентированной кривой L имеют вид $x=2\cos t, \quad y=2\sin t, \quad z=3 \quad \left(t\in[0,\,2\pi]\right)$. Тогда, согласно (1.4), получим:

$$C=\int_L y\,dx+x^2\,dy-z\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t\;dt)+4\cos^2 t\cdot 2\cos t\;dt-3\cdot 0=$$

$$=8\int_0^{2\pi}\cos^3 t\;\;dt-4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\;dt=$$

$$=8\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d(\sin t)-2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt=-4\pi.$$

Ротором гладкого векторного поля (1.1) называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\bar{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

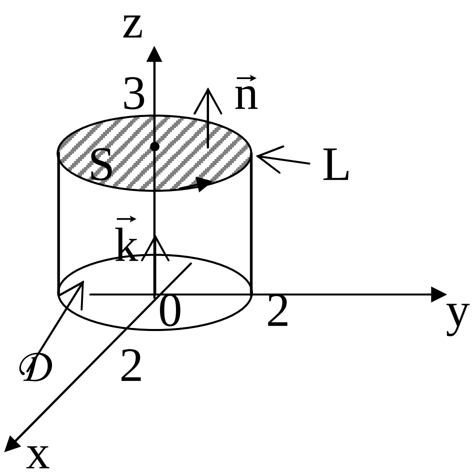
Справедлива формула *Стокса*

$$C=\int_L \vec{F}\cdot\overline{d\ell}=\iint_S \operatorname{rot}_n\vec{F}\;dS, \quad \operatorname{rot}_n\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}, \tag{1.6}$$

т.е. циркуляция векторного поля $\vec{F}$ вдоль замкнутой кривой L равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность S, границей которой является L. Направление обхода по L и сторона поверхности S одновременно или положительные, или отрицательные.

2. Проверить результат задачи 1 с помощью формулы Стокса.

Решение. В качестве поверхности S, границей которой является кривая Γ, возьмём круг $x^2+y^2\le 4$, $z=3$.



Тогда $\vec{n}=\vec{k}\{0,\ 0,\ 1\}$. Далее

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x^2 & -z\end{vmatrix}=$$

$$=0\cdot\vec{i}-0\cdot\vec{j}+(2x-1)\vec{k}=(2x-1)\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}_n\vec{F}=2x-1,\quad dS=dx\ dy$$

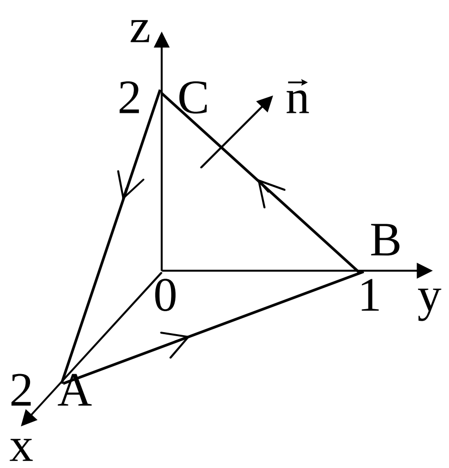
и, согласно (1.6),

$$C=\iint\limits_S(2x-1)dS=\iint\limits_{\mathcal{D}}(2x-1)dx\ dy=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(2\rho\cos\varphi-1)\rho\ d\rho=-2\pi\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2=-4\pi.$$

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}=(2y+z)\ \vec{i}+(x-y)\ \vec{j}-2z\ \vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $S:\ x+2y+z=2$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормали этой плоскости непосредственно и с помощью формулы Стокса.

Решение. В результате пересечения плоскости S с координатными плоскостями получим ΔABC и укажем на нем положительное направление обхода контура ABCA в соответствии с условием задачи.



1) Вычислим циркуляцию C данного поля $\vec{F}$ по формуле (1.4)

$$C=\int\limits_{ABCA}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=\int\limits_{AB}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}+$$

$$+\int\limits_{BC}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}+\int\limits_{CA}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}.$$

На отрезке AB имеем:

$$z=0,\quad x+2y=2,\quad y=1-\frac{x}{2},\quad dy=-\frac{dx}{2},$$

$$\overrightarrow{d\ell}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j},\quad \vec{F}=2y\,\vec{i}+(x-y)\,\vec{j},\quad \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=2y\,dx+(x-y)\,dy,$$

$$\int\limits_{AB}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=\int\limits_{AB}2y\,dx+(x-y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{2}^{0}\left[2\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{x}{2}\right)\right]dx=\int\limits_{0}^{2}\left(\frac{7x}{4}-\frac{5}{2}\right)dx=-\frac{3}{2}.$$

На отрезке BC верны соотношения:

$$x=0,\quad 2y+z=2,\quad z=2-2y,\quad dz=-2\,dy,$$

$$\overrightarrow{d\ell}=dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k},\quad \vec{F}=(2y+z)\,\vec{i}-y\,\vec{j}-2z\,\vec{k},\quad \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=-y\,dy-2z\,dz,$$

$$\int\limits_{BC}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=\int\limits_{BC}-y\,dy-2z\,dz=$$

$$=\int\limits_{1}^{0}\left[-y+4(2-2y)\right]dy=\int\limits_{0}^{1}(9y-8)\,dy=-\frac{7}{2}.$$

На отрезке CA имеем:

$$y=0,\quad x+z=2,\quad z=2-x,\quad dz=-dx,$$

$$\overrightarrow{d\ell}=dx\,\vec{i}+dz\,\vec{k},\quad \vec{F}=z\,\vec{i}+x\,\vec{j}-2z\,\vec{k},\quad \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=z\,dx-2z\,dz,$$

$$\int\limits_{CA} \vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=\int\limits_{CA} z\,dx-2z\,dz=$$

$$=\int\limits_0^2\left[2-x+2(2-x)\right]dx=\int\limits_0^2(6-3x)\,dx=6.$$

Следовательно, $C=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}+6=1.$

2) Воспользуемся формулой Стокса (1.6). Единичный вектор нормали к плоскости S: $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)$. Вычислим ротор данного векторного поля $\vec{F}$ по формуле (1.5): $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{j}-\vec{k}$,

тогда $\qquad \operatorname{rot}_n\vec{F}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot 1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot 1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}.$

По формуле Стокса

$$C=\iint\limits_S \operatorname{rot}_n\vec{F}\,dS=\iint\limits_{\Delta ABC}\frac{1}{\sqrt{6}}\,dS=\frac{1}{\sqrt{6}}\iint\limits_{\Delta ABO}\sqrt{6}\,dx\,dy=S_{\Delta ABO}=1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить ротор векторного поля $\vec{F}$ в точке M:

а) $\vec{F}=x\,y\,z\,\vec{i}+(x+y+z)\,\vec{j}+\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{k},\quad M(1,\,-1,\,2)$;

б) $\vec{F}=x\,y^2\,z^2\,\vec{i}+x^2\,y\,z^2\,\vec{j}+x\,y\,z\,\vec{k},\quad M(2,\,-1,\,1)$.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль линии L в положительном направлении обхода относительно нормали $\vec{n}=\vec{k}\{0,\ 0,\ 1\}$ непосредственно и с помощью формулы Стокса:

а) $\quad \vec{F}=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}+z\,\vec{k},\qquad L:\quad x^2+y^2=1,\qquad z=3;$

б) $\vec{F} = 6z\,\vec{i} - x\,\vec{j} + x\,y\,\vec{k}$, $\quad L: \quad x^2 + y^2 = 9, \quad z = 3$;

в) $\vec{F} = -z\,\vec{i} - x\,\vec{j} + x\,z\,\vec{k}$, $\quad L: \quad x^2 + y^2 = 25, \quad z = 4$;

г) $\vec{F} = -x^2\,y^3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + y\,\vec{k}$, $\quad L: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 5$.

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости S с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормали этой плоскости непосредственно и с помощью формулы Стокса:

а) $\vec{F} = 3x\,\vec{i} + (y + z)\,\vec{j} + (x - z)\,\vec{k}$, $\quad S: \quad x + 3y + z = 3$;

б) $\vec{F} = (x + z)\,\vec{i} + (z - x)\,\vec{j} + (x + 2y + z)\,\vec{k}$, $\quad S: \quad x + y + z = 2$.

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль линии L в направлении, соответствующем возрастанию параметра t:

а) $\vec{F} = \left(x\,y^2 - y\right)\vec{i} + \left(x + x^2\,y\right)\vec{j}$, $\quad L: \quad x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 0$;

б) $\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$, $\quad L: \quad x = 3\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 0$;

в) $\vec{F} = \left(x^3 - y\right)\vec{i} + \left(y^3 + x\right)\vec{j}$, $\quad L: \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0$.

Ответы

1. а) $-3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; б) $10\vec{i} + 5\vec{j}$.

2. а) -2π; б) -9π; в) -25π; г) $\dfrac{\pi}{8}$.

3. а) -6; б) 0.

4. а) 8π; б) -12π; в) 2π.

1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Решение типовых задач

1. Доказать:

1) $\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\vec{F}=0$ для любого поля $\vec{F}$;

2) $\operatorname{rot}\ \operatorname{grad} u(M)=\vec{0}$;

3) $\operatorname{div}\ \operatorname{grad} u(M)=\Delta u, \quad \Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$

Решение.

1) Пусть $\vec{F}=P(x, y, z)\,\vec{i}+Q(x, y, z)\,\vec{j}+R(x, y, z)\,\vec{k}.$

По определению имеем

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}=0.$$

2) Пусть $u(M)=u(x,\ y,\ z)$. По определению имеем

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

3) $$\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u.$$

2. Показать, что поле $\vec{F}=(2x\ y+z)\,\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\,\vec{k}$ является потенциальным, но не соленоидальным. Найти потенциал $u(x,\ y,\ z)$ данного поля.

Решение. Поле $\vec{F}$ называется *потенциальным* или безвихревым, если $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$. Поле $\vec{F}$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div}\vec{F}=0$.

Находим

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x\ y+z & x^2-2y & x\end{vmatrix}=(0-0)\,\vec{i}-(1-1)\,\vec{j}+(2x-2x)\,\vec{k}=\vec{0},$$

т. е. поле $\vec{F}$ – потенциальное.

Далее имеем

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(2x\ y+z)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-2y\right)+\frac{\partial}{\partial z}(x)=2y-2+0=2y-2\neq 0,$$

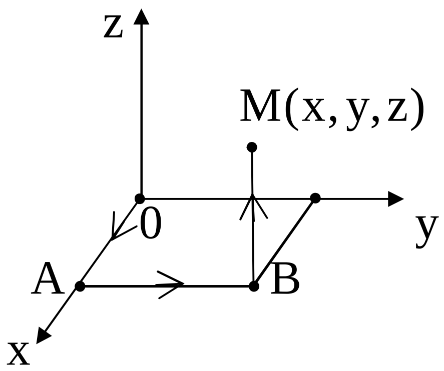
поэтому поле $\vec{F}$ не является соленоидальным.

В потенциальном векторном поле криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования и справедлива формула

$$\int\limits_{AB}\vec{F}\cdot\overrightarrow{d\ell}=u(B)-u(A).$$

Потенциал $u(x,\ y,\ z)$ векторного поля $\vec{F}=P\ \vec{i}+Q\ \vec{j}+R\ \vec{k}$ определяется формулой

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\ dx+Q\ dy+R\ dz,$$



где $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – фиксированная, $(x, y,\ z)$ – произвольная текущая точки. Выберем начало координат $O(0,\ 0,\ 0)$ за фиксированную точку, а в качестве пути интегрирования ломанную $OABM$, тогда

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{OABM}(2x\ y+z)dx+\left(x^2-2y\right)dy+x\ dz.$$

На отрезке OA имеем: $y=0,\quad z=0\quad dy=0,\quad dz=0,$

на AB: $z=0,\quad dx=0,\quad dz=0,$ на BM: $dx=0,\quad dy=0.$

Тогда

$$\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BM}=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y\left(x^2-2y\right)dy+\int\limits_0^z x\ dz=x^2\ y-y^2+x\ z.$$

Потенциал $u(x,\ y,\ z)=x^2\ y-y^2+x\ z.$

3. Доказать, что функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической, и векторное поле $\vec{F} = \text{grad } u$ – гармоническое.

Решение. Функция $u = u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется *гармонической*. Поле $\vec{F}$ называется *гармоническим*, если оно потенциальное и соленоидальное.

Проверим, справедливо ли для данной функции уравнение Лапласа.

Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + 3 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Следовательно, данная функция $u = \frac{1}{r}$ – гармоническая.

Далее находим

$$\vec{F} = \text{grad } u = -\frac{1}{r^3}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right).$$

Так как $\text{rot } \vec{F} = \text{rot grad } u = \vec{0}$ (см. задачу 1.2), то одно из условий в определении гармонического поля $\vec{F}$ выполнено. Другое условие $\text{div } \vec{F} = 0$ также выполняется, поскольку

$$\text{div } \vec{F} = \text{div grad } u = \Delta u = 0 \quad \text{(см. задачу 1.3)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $\operatorname{div}\ \operatorname{grad} u$, если

а) $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$; б) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Найти $\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\vec{F}$, если

а) $\vec{F}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$; б) $\vec{F}=z\,x^2\vec{i}-y^2\vec{j}+x\,y\,\vec{k}$.

3. Установить потенциальность поля $\vec{F}$ и найти его потенциал $u(x, y, z)$, если

а) $\vec{F}=2x\,y\,\vec{i}+\left(x^2-2y\,z\right)\vec{j}-y^2\vec{k}$;

б) $\vec{F}=\left(3x^2\,y-y^3\right)\vec{i}+\left(x^3-3x\,y^2\right)\vec{j}$;

в) $\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+x)\vec{k}$.

4. Проверить, является ли гармонической функция $u=\ln r$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

5. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{F}$ гармоническим

а) $\vec{F}=x^2\,z\,\vec{i}+y^2\vec{j}-x\,z^2\vec{k}$; б) $\vec{F}=y\,z\,\vec{i}+x\,z\,\vec{j}+x\,y\,\vec{k}$.

Ответы

1. а) $\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. а) $6\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)$; б) $2\left(z\,\vec{i}-\vec{j}+x\,\vec{k}\right)$.

3. а) $u = x^2 y - y^2 z$; б) $u = x^3 y - x y^3$; в) $u = xy + yz + xz$;

4. да. **5.** а) нет; б) да.

Тема 2. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

2.1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. ФОРМУЛА ДЕЛАМБЕРА

Рассмотрим задачу Коши для уравнения колебаний бесконечной струны: требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$u''_{tt} = a^2\, u''_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x, 0) = \psi(x).$$

Решение задачи Коши определяет формула Деламбера (см. [1], 2.2)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\, dS.$$

Решение типовых задач

1. Найти решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$, если $u(x, 0) = x^2$, $u'_t(x, 0) = 1$.

Решение. Здесь $a = 1$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 1$. Отсюда

$$u(x, t) = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} dS = x^2 + t^2 + \frac{1}{2} S\Big|_{x-t}^{x+t},$$

или

$$u(x, t) = x^2 + t^2 + t.$$

2. Найти форму струны, определяемой уравнением $u''_{tt} = 4u''_{xx}$ в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$, если в начальный момент заданы условия: $u(x, 0) = \sin x$, $u'_t(x, 0) = 0$.

Решение. Подставим исходные данные в формулу Деламбера:

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+2t) + \sin(x-2t)}{2} = \frac{1}{2}(\sin x \cos 2t +$$

$$+ \cos x \sin 2t + \sin x \cos 2t - \cos x \sin 2t) = \sin x \cos 2t.$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ решение примет вид:

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти решение задачи Коши:

а) $\begin{cases} u''_{tt} = \frac{1}{4} u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = x. \end{cases}$

б) $\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u'_t(x, 0) = -x. \end{cases}$

в) $\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} u''_{tt} = 9u''_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & u'_t(x, 0) = 1. \end{cases}$

2. Найти форму струны, определяемой уравнением $u''_{tt} = u''_{xx}$ в момент времени $t = \pi$, если в начальный момент заданы условия: $u(x, 0) = \sin x, \quad u'_t(x, 0) = \cos x.$

Ответы

1. а) $u(x, t) = x t;$ б) $u(x, t) = x(1 - t);$ в) $u(x, t) = x^2 + a^2 t^2;$

г) $u(x, t) = \sin x \cos 3t + t;$ д) $u(x, t) = -\sin x.$

2.2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. МЕТОД ФУРЬЕ

Решение типовых задач

1. Струна, закрепленная на концах $x = 0, \; x = \ell$, имеет в начальный момент времени форму параболы: $u(x, 0) = \dfrac{4}{\ell^2} x(\ell - x).$ Найти форму струны в любой момент времени, если начальные скорости отсутствуют.

Решение. Свободные колебания струны, закрепленной на концах, моделируются смешанной задачей с краевыми условиями первого типа

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, & 0 \le x \le \ell, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u'_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = 0, & u(\ell, t) = 0. \end{cases}$$

Решение данной краевой задачи определяется формулой (см. [1], 2.4)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\left(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t\right),\quad \omega=\frac{\pi a}{\ell},$$

с коэффициентами

$$A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,\quad n=1,2,\ldots .$$

Для нашего случая при $\varphi(x)=\frac{4}{\ell^2}x(\ell-x),\quad \psi(x)=0$ имеем:

$$A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\frac{4}{\ell^2}x(\ell-x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx,\qquad B_n=0,\quad n=1,2,\ldots .$$

Применяя дважды метод интегрирования по частям, получим:

$$A_n=\frac{8}{\ell^3}\int_0^{\ell}(\ell x-x^2)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\ell x-x^2 & du=(\ell-2x)dx \\ d\upsilon=\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx & \upsilon=-\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{8}{\ell^3}\left(-\frac{\ell\left(\ell x-x^2\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell}+\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{\ell}(\ell-2x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)=$$

$$=\frac{8}{\ell^2 n\pi}\int_0^{\ell}(\ell-2x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ell-2x & du=-2dx \\ d\upsilon=\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx & \upsilon=\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{\ell^2 n\pi}\left(\frac{\ell(\ell-2x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell}+\frac{2\ell}{n\pi}\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)=$$

$$=\frac{16}{\ell n^2\pi^2}\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{16}{\ell n^2\pi^2}\left(-\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_0^{\ell}=$$

$$=-\frac{16}{n^3\pi^3}(\cos n\pi-1)=\frac{16}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)=\left[\begin{matrix}\frac{32}{n^3\pi^3}, & n=2k+1, \\ 0, & n=2k.\end{matrix}\right.$$

Тогда решение задачи примет следующий вид

$$u(x,\,t)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{\ell}\cos\frac{a(2k+1)\pi t}{\ell}.$$

2. Изучить свободные продольные колебания однородного стержня длиной ℓ, у которого оба конца свободны, при произвольных начальных данных. Решить задачу в предположении, что длина струны $\ell=\pi$, а начальные условия имеют вид: $u(x,\,0)=x,\;\; u'_t(x,\,0)=2.$

Решение. Задача приводится к решению уравнения

$$u''_{tt}=a^2u''_{xx},\quad 0\le x\le\ell,\quad t>0, \tag{2.1}$$

при условиях

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t'(x,\,0)=\psi(x), \tag{2.2}$$

$$u_x'(0,\,t)=0,\quad u_x'(\ell,\,t)=0. \tag{2.3}$$

Смешанная задача с краевыми условиями второго типа аналогично решается методом Фурье.

а) Будем искать ненулевое частное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее краевым условиям (2.3), в виде произведения

$$u(x,\,t)=X(x)\,T(t). \tag{2.4}$$

Подставляя выражение (2.4) в (2.1), получим $X''\,T=\dfrac{1}{a^2}\,T''\,X$

или, после деления на $X\,T$,

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\lambda=\text{const}.$$

Ненулевая функция (2.4) будет удовлетворять уравнению (2.1) и условиям (2.3), если функция $X(x)$ – ненулевое решение краевой задачи

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & 0\le x\le \ell, \\ X'(0)=X'(\ell)=0, \end{cases} \tag{2.5}$$

функция $T(t)$ – ненулевое решение уравнения

$$T''+a^2\lambda\,T=0. \tag{2.6}$$

Все решения уравнения (2.5) даются формулой

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим:

$$X'(x)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x,$$

$$\begin{cases} C_2\sqrt{\lambda}=0, \\ \sqrt{\lambda}\left(-C_1\sin\sqrt{\lambda}\,\ell+C_2\cos\sqrt{\lambda}\,\ell\right)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0, \\ C_2=0, \\ \sin\sqrt{\lambda}\,\ell=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\ell = \pi\,n, \qquad n = 0,1,2,...$$

(учтено $C_1 \neq 0$, в противном случае $X(x) = 0$).
Таким образом, при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\,\pi}{\ell}\right)^2, \qquad n = 0,1,2,...,$$

имеем бесконечный набор ненулевых решений задачи (2.5)

$$X_n(x) = C_1 \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n = 0,1,2,... . \tag{2.7}$$

Из уравнения (2.6) при $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1,\, 2,\, ...)$ соответственно найдем

$$T_0(t) = a + b\,t, \tag{2.8}$$

$$T_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t, \quad \omega = \frac{\pi\, a}{\ell}, \quad n = 1,\, 2,\, ...\,, \tag{2.9}$$

где a, b, a_n, b_n – произвольные постоянные. Подставляя (2.7), (2.8) и (2.9) в (2.4), получаем искомый набор функций, удовлетворяющих (2.1) и (2.3):

$$u_0(x,\, t) = C_1(a + b\,t) = A + B\,t,$$

$$u_n(x,\, t) = C_1 \cos\frac{n\pi x}{\ell}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right) =$$

$$= \cos\frac{n\pi x}{\ell}\left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t\right),$$

где $A = C_1 a$, $B = C_1 b$, $A_n = C_1 a_n$, $B_n = C_1 b_n$, $n = 1,\, 2,\, ...$.

б) Будем искать решение краевой задачи (2.1) – (2.3) в виде суммы решений:

$$u(x,\, t) = u_0(x,\, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\, t) =$$

$$= A + Bt + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t\right). \qquad (2.10)$$

Выберем постоянные A, B, A_n, B_n так, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяла начальным условиям (2.2). При $t = 0$ имеем

$$u(x, 0) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x) \qquad (2.11)$$

и

$$u_t'(x, 0) = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} B_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x). \qquad (2.12)$$

Соотношения (2.11) и (2.12) будем рассматривать как разложение в ряд Фурье четных на $[-\ell, \ell]$ функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с коэффициентами разложений A, A_n и $B, \frac{n\pi a}{\ell}B_n$ соответственно. Из теории рядов Фурье известен вид коэффициентов:

$$A = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\,dx, \quad A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (2.13)$$

$$B = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\,dx, \quad B_n = \frac{2}{2\pi a}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \; (2.14)$$

Итак, решение краевой задачи (2.1) – (2.3) представлено в виде ряда (2.10) с коэффициентами (2.13) и (2.14).

В случае, когда $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 2$, $\ell = \pi$ имеем:

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ d\upsilon = \cos nx\,dx & \upsilon = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k. \end{array}\right.$$

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\,dx = \frac{2}{\pi}\,x\Big|_0^{\pi} = 2.$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\pi} 2\cos nx\,dx = \frac{4}{n^2\pi a}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0.$$

При вычислении коэффициентов A_n использован метод интегрирования по частям. Окончательно решение примет вид

$$u(x,\,t) = \frac{\pi}{2} + 2t - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x\cdot\cos a(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачу о колебании струны $0 \le x \le \ell$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму:

а) $u(x,\,0) = \sin\dfrac{\pi x}{\ell}, \quad \ell = \pi;$

б) ломаной OAB, где $O(0,\,0)$, $A(1,\,1)$, $B(2,\,0)$.

2. Решить задачу о колебании струны $0 \le x \le \ell$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое $u(x, 0) = 0$, а начальная скорость задается формулой:

а) $u'_t(x, 0) = \upsilon_0 = \text{const};$

б) $u'_t(x, 0) = \sin\dfrac{2\pi x}{\ell}, \quad \ell = \pi.$

3. В полуполосе $0 \le x \le \ell$, $t > 0$ для уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

а) $u(x, 0) = \sin\dfrac{5\pi x}{2\ell}, \quad u'_t(x, 0) = \sin\dfrac{\pi x}{2\ell}, \quad \ell = \dfrac{\pi}{2},$

$u(0, t) = 0, \quad u'_x(\ell, t) = 0;$

б) $u(x, 0) = x, \quad u'_t(x, 0) = 1 + x, \quad \ell = 4,$

$u'_x(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0;$

в) $u(x, 0) = x^2, \quad u'_t(x, 0) = x, \quad \ell = 5,$

$u'_x(0, t) = 0, \quad u'_x(\ell, t) = 0;$

г) $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x),$

$u(0, t) = 0, \quad u'_x(\ell, t) + h\,u(\ell, t) = 0.$

Ответы

1. а) $u(x, t) = \sin x \, \cos at;$

б) $$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}\cos\frac{an\pi t}{2}.$$

2. а) $u(x,\,t)=\dfrac{4\ell\upsilon_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}\times$

$$\times\sin\frac{a(2n+1)\pi t}{\ell};$$

б) $u(x,\,t)=\dfrac{1}{2a}\sin 2x\ \sin 2at.$

3. а) $u(x,\,t)=\dfrac{1}{a}\sin x\ \sin at+\sin 5x\ \cos 5at;$

б) $u(x,\,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{8}\left[A_n\cos\dfrac{a(2n+1)\pi t}{8}+\right.$

$$\left.+B_n\sin\frac{a(2n+1)\pi t}{8}\right],$$

$$A_n=\frac{16}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{2}{(2n+1)^2}\right],$$

$$B_n=\frac{32}{\pi^2 a}\left[\frac{5(-1)^n}{(2n+1)^2}-\frac{8}{(2n+1)^3}\right];$$

в) $u(x,\,t)=\dfrac{25}{3}+\dfrac{5}{2}t-\dfrac{100}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\dfrac{n\pi x}{5}\times$

$$\times\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{a(2n+1)\pi t}{5}+\frac{1}{(2n+1)^3\pi a}\sin\frac{a(2n+1)\pi t}{5}\right];$$

г) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\left(A_n\cos a\sqrt{\lambda_n}\,t+B_n\sin a\sqrt{\lambda_n}\,t\right),$

$$A_n=\frac{2\left(h^2+\lambda_n\right)}{\ell\left(h^2+\lambda_n\right)+h}\int_0^{\ell}\varphi(x)\,\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx,$$

$$B_n=\frac{2\left(h^2+\lambda_n\right)}{a\sqrt{\lambda_n}\left[\ell\left(h^2+\lambda_n\right)+h\right]}\int_0^{\ell}\psi(x)\,\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx,$$

λ_n – положительные корни уравнения $h\,\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}\,\ell=-\sqrt{\lambda}.$

2.3. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Изложенный выше метод Фурье позволяет также решать краевые задачи для неоднородного волнового уравнения.

Сформулируем, например, задачу о вынужденных колебаниях струны, закрепленной на концах:

$$\begin{cases} u''_{tt}=a^2u''_{xx}+f(x,t), \quad 0\le x\le\ell, \quad t>0, & (2.15)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u'_t(x,0)=\psi(x), & (2.16)\\ u(0,t)=0, \quad u(\ell,t)=0. & (2.17)\end{cases}$$

Будем искать решение в форме разложения в ряд Фурье по ортогональной на $[0,\ell]$ системе собственных функций $\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad n=1,2,\ldots$, найденных в задаче о свободных колебаниях струны с закрепленными концами и удовлетворяющих граничным условиям (2.17) (см. [1], 2.4).

Тогда $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{2.18}$$

где коэффициенты $u_n(t)$ следует найти так, чтобы ряд (2.18) удовлетворял уравнению (2.15) и начальным условиям (2.16). Для этого представим функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в виде следующих тригонометрических рядов Фурье:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell},\quad f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi,t)\,\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi;$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\,\sin\frac{n\pi x}{\ell},\qquad \varphi_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\,\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi;$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\,\sin\frac{n\pi x}{\ell},\qquad \psi_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\,\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi. \tag{2.19}$$

Подставив ряды (2.18) и (2.19) в уравнение (2.15) и начальные условия (2.16), получим следующие соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n''(t)+\omega_n^2\,u_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell},\quad \omega_n=\frac{n\pi a}{\ell};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\,\sin\frac{n\pi x}{\ell};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(0)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \tag{2.20}$$

Уравнивая в полученных равенствах коэффициенты при $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$, получим задачу Коши для $u_n(t)$:

$$\begin{cases} u_n''(t)+\omega_n^2\,u_n(t)=f_n(t), & (2.21)\\ u_n(0)=\varphi_n,\quad u_n'(0)=\psi_n. & (2.22)\end{cases}$$

Общее решение уравнения (2.21), найденное методом Лагранжа вариации постоянных, имеет вид

$$u_n(t)=A_n\ \cos\omega_n t+B_n\ \sin\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\ \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau.$$

Удовлетворяя начальным условиям (2.22), получим решение задачи (2.21), (2.22) в виде

$$u_n(t)=\varphi_n\ \cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\psi_n\ \sin\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau. \quad (2.23)$$

Подставляя $u_n(t)$ в ряд (2.18), получим решение исходной задачи (2.15) – (2.17) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\ \cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\psi_n\ \sin\omega_n t\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\left[\int_0^t f_n(\tau)\ \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell},\quad \omega_n=\frac{n\pi a}{\ell}.$$

Решим задачу (2.15) – (2.17) при нулевых начальных условиях, т. е. $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$ и $f(x,t)=A\ x\ e^{-t}$. В этом случае решение имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\left[\int_0^t f_n(\tau)\ \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \quad (2.24)$$

Вычислим $f_n(t)$ по первой формуле соотношений (2.19).

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}A\ \xi\ e^{-t}\ \sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi=\frac{2A}{\ell}e^{-t}\int_0^{\ell}\xi\ \sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi.$$

Используя метод интегрирования по частям:

$$u=\xi,\qquad du=d\xi,$$

$$d\upsilon=\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi,\qquad \upsilon=-\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi\xi}{\ell},$$

получим

$$\frac{2A}{\ell}e^{-t}\left(-\frac{\ell\xi}{n\pi}\cos\frac{n\pi\xi}{\ell}\Bigg|_0^{\ell}+\frac{\ell}{n\,\pi}\int_0^{\ell}\cos\frac{n\pi\xi}{\ell}\,d\xi\right)=$$

$$=\frac{2A}{\ell}e^{-t}\left(-\frac{\ell^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\xi}{\ell}\Bigg|_0^{\ell}\right)=$$

$$=\frac{2A\ell(-1)^{n+1}e^{-t}}{n\pi}=\frac{2Aa}{\omega_n}(-1)^{n+1}e^{-t}.$$

Подставляя $f_n(t)$ в (2.24), получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2Aa}{\omega_n^2}(-1)^{n+1}\left[\int_0^t e^{-\tau}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой

$$\int e^{at}\sin(c+bt)\,dt=\frac{e^{at}}{a^2+b^2}\big(a\sin(c+bt)-b\cos(c+bt)\big).$$

$$\int_0^t e^{-\tau}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{e^{-\tau}}{1+\omega_n^2}\big(-\sin\omega_n(t-\tau)+\omega_n\cos\omega_n(t-\tau)\big)\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{1+\omega_n^2}\left(e^{-t}\omega_n+\sin\omega_n t-\omega_n\cos\omega_n t\right)=$$

$$=\frac{\omega_n}{1+\omega_n^2}\left(e^{-t}-\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right).$$

Окончательно имеем

$$u(x,t)=2Aa\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n\left(1+\omega_n^2\right)}\left(e^{-t}-\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (2.25)$$

Замечание. Функция (2.25) описывает вынужденные колебания ограниченной струны, которые совершаются только под действием внешней распределенной по струне вынуждающей силы при отсутствии начальных возмущений струны.

Задачи для самостоятельного решения

1. В полуполосе $0\le x\le\ell,\quad t>0$ решить смешанные задачи для уравнения $u''_{tt}=a^2u''_{xx}+f(x,t)$ с начальными условиями $u(x,0)=0,\ u'_t(x,0)=0$ и следующими краевыми условиями:

а) $u(0,t)=u(\ell,t)=0,\quad f(x,t)=A\,e^{-t}\sin\frac{\pi x}{\ell};$

б) $u(0,t)=u(\ell,t)=0,\quad f(x,t)=2b\quad(b=\mathrm{const}),\quad a=1;$

в) $u(0,t)=u'_x(\ell,t)=0,\quad f(x,t)=A\sin t;$

г) $u'_x(0,t)=u(\ell,t)=0,\quad f(x,t)=A\,e^{-t}\cos\frac{\pi x}{2\ell}.$

2. Решить смешанную задачу:

$$\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx} + x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x, \quad u'_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

Ответы

1. а) $$u(x, t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2} \sin\frac{\pi x}{\ell}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{\ell} + \frac{\ell}{\pi a}\sin\frac{a\pi t}{\ell}\right);$$

б) $$u(x, t) = b\, x(\ell - x) + \frac{4\ell^2 b}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi t}{\ell};$$

в) $$u(x, t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\left\{\left[\frac{a(2n+1)\pi}{2\ell}\right]^2 - 1\right\}}\times$$

$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\cdot\left[\sin t - \frac{2\ell}{(2n+1)\pi a}\sin\frac{a(2n+1)\pi t}{2\ell}\right];$$

г) $$u(x, t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{a\pi}{2\ell}\right)^2}\cos\frac{\pi x}{2\ell}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{2\ell} + \frac{2\ell}{\pi a}\sin\frac{a\pi t}{2\ell}\right).$$

2. $$u(x, t) = \sin 2x \cos 2t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx(1 - \cos nt).$$

2.4. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Решение типовых задач

1. Рассмотрим мембрану прямоугольной формы со сторонами ℓ_1 и ℓ_2, жестко закрепленную по периметру. Опишем процесс малых поперечных колебаний такой мембраны, инициированный начальным отклонением и начальной скоростью.

Решение. Математическая модель процесса свободных колебаний такой мембраны имеет вид краевой задачи

$$\begin{cases} u''_{tt} = a^2\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right), \quad 0 \le x \le \ell_1, \quad 0 \le y \le \ell_2, \quad t > 0, & (2.26) \\ u(x,\, y,\, 0) = \varphi(x,\, y), \quad u'_t(x,\, y,\, 0) = \psi(x,\, y), & (2.27) \\ u(0,\, y,\, t) = u(\ell_1,\, y,\, t) = u(x,\, 0,\, t) = u(x,\, \ell_2,\, t) = 0. & (2.28) \end{cases}$$

Решение задачи (2.26) – (2.28) будем искать методом Фурье.

а) Найдем частные решения, удовлетворяющие граничным условиям (2.28), в виде

$$u(x,\, y,\, t) = \upsilon(x,\, y)\; T(t). \tag{2.29}$$

Подставляя (2.29) в уравнение (2.26), получим

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{T''}{T} = \frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} = -\lambda = \mathrm{const}.$$

Отсюда следуют уравнение для функции $T(t)$

$$T'' + a^2\lambda\, T = 0 \tag{2.30}$$

и задача на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta\upsilon + \lambda\,\upsilon = 0, \\ \upsilon(0,\, y) = \upsilon(\ell_1,\, y) = \upsilon(x,\, 0) = \upsilon(x,\, \ell_2) = 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Полагая $\upsilon(x,\, y) = X(x)\cdot Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получим две идентичные задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \nu\, X = 0, \\ X(0) = X(\ell_1) = 0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} Y'' + \mu\, Y = 0, \\ Y(0) = Y(\ell_2) = 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

где ν и μ – собственные значения, связанные с λ соотношением $\nu + \mu = \lambda$.

Для задач (2.32) наборы собственных значений и соответствующих им собственных функций имеют вид

$$\nu_n = \left(\frac{n\,\pi}{\ell_1}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\,\pi\,x}{\ell_1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_m = \left(\frac{m\,\pi}{\ell_2}\right)^2, \qquad Y_m(y) = \sin\frac{m\,\pi\,y}{\ell_2}, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Тогда задача на собственные значения (2.31) имеет в качестве собственных чисел

$$\lambda_{n\,m} = \left(\frac{n\,\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{m\,\pi}{\ell_2}\right)^2, \qquad n, m = 1, 2, \ldots,$$

каждому из которых соответствует собственная функция

$$\upsilon_{n\,m} = \sin\frac{n\,\pi\,x}{\ell_1}\,\sin\frac{m\,\pi\,y}{\ell_2}.$$

Теперь с учетом (2.30) находим частные решения уравнения (2.26), удовлетворяющие граничным условиям (2.28):

$$u_{n\,m}(x, y, t) = \upsilon_{n\,m}(x, y)\left(A_{n\,m}\cos\omega_{n\,m}\,t + B_{n\,m}\sin\omega_{n\,m}\,t\right),$$

где
$$\omega_{n\,m} = a\sqrt{\lambda_{n\,m}} = a\pi\sqrt{\left(\frac{n}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{\ell_2}\right)^2}.$$

б) Будем искать решение краевой задачи (2.26) – (2.28) в виде двойного ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{\ell_1} \sin\frac{m\pi y}{\ell_2} \times$$

$$\times \left(A_{nm} \cos \omega_{nm} t + B_{nm} \sin \omega_{nm} t \right). \qquad (2.33)$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} найдем, выполняя начальные условия (2.27):

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\frac{n\pi x}{\ell_1} \sin\frac{m\pi y}{\ell_2};$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} B_{nm} \sin\frac{n\pi x}{\ell_1} \sin\frac{m\pi y}{\ell_2}.$$

Эти равенства следует рассматривать как разложения функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в двойные тригонометрические ряды Фурье. Поэтому для коэффициентов A_{nm} и B_{nm} получаем

$$A_{nm} = \frac{4}{\ell_1 \ell_2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \varphi(x, y) \sin\frac{n\pi x}{\ell_1} \sin\frac{m\pi y}{\ell_2} \, dx \, dy; \qquad (2.34)$$

$$B_{nm} = \frac{4}{\omega_{nm} \ell_1 \ell_2} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \psi(x, y) \sin\frac{n\pi x}{\ell_1} \sin\frac{m\pi y}{\ell_2} \, dx \, dy. \qquad (2.35)$$

Итак, решение краевой задачи (2.26) – (2.28) представлено в виде ряда (2.33) с коэффициентами (2.34) и (2.35).

Решим задачу (2.26) – (2.28) для случая, когда

$$u(x, y, 0) = x y (6 - x)(4 - y),$$

$$u'_t(x, y, 0) = 0, \quad \ell_1 = 6, \quad \ell_2 = 4.$$

Найдем коэффициенты A_{nm} и B_{nm}:

$$A_{nm}=\frac{4}{6\cdot 4}\int_0^6\int_0^4 x\ y\,(6-x)\,(4-y)\ \sin\frac{n\pi x}{6}\ \sin\frac{m\pi y}{4}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^6 x(6-x)\ \sin\frac{n\pi x}{6}\,dx\ \int_0^4 y(4-y)\ \sin\frac{m\pi y}{4}\,dy;$$

$$B_{nm}=0.$$

Интегралы вычислим, применяя дважды метод интегрирования по частям:

$$\int_0^4 y(4-y)\ \sin\frac{m\pi y}{4}\,dy=\begin{vmatrix} u=4y-y^2 & du=(4-2y)\,dy \\ dv=\sin\frac{m\pi y}{4}\,dy & v=-\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi y}{4}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{4\left(4y-y^2\right)}{m\pi}\cos\frac{m\pi y}{4}\Bigg|_0^4+\frac{4}{m\pi}\int_0^4(4-2y)\ \cos\frac{m\pi y}{4}\,dy=$$

$$=\begin{vmatrix} u=4-2y & du=-2\,dy \\ dv=\cos\frac{m\pi y}{4}\,dy & v=\frac{4}{m\pi}\sin\frac{m\pi y}{4}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{4}{m\pi}\left(\frac{4(4-2y)}{m\pi}\sin\frac{m\pi y}{4}\Bigg|_0^4+\frac{8}{m\pi}\int_0^4\sin\frac{m\pi y}{4}\,dy\right)=$$

$$=-\frac{2\cdot 4^3}{m^3\ \pi^3}\cos\frac{m\pi y}{4}\Bigg|_0^4=\frac{2\cdot 4^3}{m^3\ \pi^3}\left(1-(-1)^m\right)=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{4^4}{m^3\ \pi^3}, & m-\text{нечетное},\\ 0, & m-\text{четное}.\end{array}\right.$$

Аналогично, $\int\limits_0^6 x(6-x)\sin\frac{n\pi x}{6}\,dx = \begin{cases} \dfrac{4\cdot 6^3}{n^3\,\pi^3}, & n-\text{нечетное},\\ 0, & n-\text{четное}. \end{cases}$

Следовательно,

$$A_{nm} = \frac{1}{6}\cdot\frac{4\cdot 6^3}{(2n+1)^3\,\pi^3}\cdot\frac{4^4}{(2m+1)^3\,\pi^3} = \frac{4^5\cdot 6^2}{\pi^6\,(2n+1)^3\,(2m+1)^3},$$

$$n,\ m = 0, 1, \ldots .$$

Итак, решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = \frac{4^5\cdot 6^2}{\pi^6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{6}\ \sin\dfrac{(2m+1)\pi y}{4}}{(2n+1)^3\,(2m+1)^3}\times$$

$$\times\cos a\pi\sqrt{\left(\frac{2n+1}{6}\right)^2+\left(\frac{2m+1}{4}\right)^2}\ t.$$

2. Изучить свободные радиальные колебания круглой мембраны радиуса R, закрепленной на границе при начальном смещении $\varphi(r) = A\left(R^2 - r^2\right)$ и начальной скорости $\psi(r) = 0$.

Решение. Задача приводится к решению уравнения

$$u''_{tt} = a^2\left(u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r\right), \qquad 0 \le r \le R, \qquad t > 0,$$

при условиях

$$u(r,0) = \varphi(r), \qquad u'_t(r,0) = \psi(r),$$

$$u(R,t) = 0.$$

Решение задачи о колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем имеет вид (см. [1], 2.8)

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\left(A_n \cos\frac{a\mu_n t}{R}+B_n \sin\frac{a\mu_n t}{R}\right),$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$, $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Коэффициенты определяются по формулам

$$A_n=\frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\varphi(r)\,dr, \quad n=1, 2, \ldots,$$

$$B_n=\frac{2}{R\, a\, \mu_n\, J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)\psi(r)\,dr, \quad n=1, 2, \ldots.$$

При нахождении коэффициентов разложения будем использовать следующие формулы:

$$\int_0^x t\, J_0(t)\,dt = x\, J_1(x);$$

$$\int_0^x t^3 J_0(t)\,dt = 2x^2 J_0(x)+\left(x^3-4x\right) J_1(x).$$

Для нашего случая при $\varphi(r)=A\left(R^2-r^2\right)$, $\psi(x)=0$ имеем:

$$A_n=\frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) A\left(R^2-r^2\right)dr=$$

$$=\frac{2A}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\left[R^2\int_0^R r\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr-\int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr\right].$$

Выполним замену:

$$t = \frac{\mu_n\ r}{R}, \qquad r = \frac{R\ t}{\mu_n},$$

$$d r = \frac{R}{\mu_n} d t, \qquad r = 0, \quad t = 0,$$

$$r = R, \quad t = \mu_n.$$

Получаем

$$\frac{2A}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \left[\frac{R^4}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} t\, J_0(t)\, d t - \frac{R^4}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} t^3\, J_0(t)\, d t \right] =$$

$$= \frac{2A\ R^2}{\mu_n^4 J_1^2(\mu_n)} \Big[\mu_n^2 \cdot \mu_n \cdot J_1(\mu_n) - \Big(2\mu_n^2 \cdot J_0(\mu_n) +$$

$$+ \mu_n^3 \cdot J_1(\mu_n) - 4\mu_n\ J_1(\mu_n) \Big) \Big] = \frac{2A\ R^2}{\mu_n^4 J_1^2(\mu_n)} \times$$

$$\times 4\mu_n\, J_1(\mu_n) = \frac{8A\ R^2}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)},$$ (учтено, что $J_0(\mu_n) = 0$).

$B_n = 0.$

Окончательно решение примет вид

$$u(r, t) = 8A\ R^2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_n\ r}{R} \right) \frac{\cos \frac{a\, \mu_n\ t}{R}}{\mu_n^3\ J_1(\mu_n)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти поперечные колебания квадратной мембраны $0 \le x \le 6, \ \ 0 \le y \le 6$ с закрепленным краем, если

а) $u(x, y, 0) = x\, y(6-x)(6-y), \qquad u'_t(x, y, 0) = 0;$

б) $u(x, y, 0) = \sin\dfrac{\pi x}{6} \sin\dfrac{\pi y}{6}, \qquad u'_t(x, y, 0) = 0.$

2. В однородной прямоугольной мембране $0 \le x \le \ell_1$, $0 \le y \le \ell_2$ часть границы $x = 0, \ \ 0 \le y \le \ell_2$ свободна, а остальная часть закреплена жестко. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные:

а) начальным отклонением $u(x, y, 0) = \cos\dfrac{\pi x}{2\ell_1} \sin\dfrac{\pi y}{\ell_2}$;

б) начальным распределением скоростей

$$u'_t(x, y, 0) = A(\ell_1 - x) \sin\frac{\pi y}{\ell_2}.$$

3. Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краю, вызванные

а) начальной скоростью $u'_t(r, 0) = \begin{cases} \upsilon_0, & 0 \le r \le \dfrac{R}{2}, \\ 0, & \dfrac{R}{2} \le r \le R; \end{cases}$

б) постоянной начальной скоростью υ_0 точек мембраны;

в) начальным отклонением $u(r, 0) = A\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$;

г) начальное отклонение и начальная скорость имеют вид: $u(r, 0) = r^2, \quad u'_t(r, 0) = r^2.$

4. Круглая однородная мембрана радиуса R, закрепленная по контуру, находится в состоянии равновесия при натяжении T. В момент времени $t = 0$ к мембране приложено нормальное давление P на единицу площади. Найти радиальные колебания мембраны.

Ответы

1. а) $$u(x, y, t) = \frac{82944}{\pi^6} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{6} \sin\frac{(2m+1)\pi y}{6}}{(2n+1)^3 (2m+1)^3} \times$$

$$\times \cos\frac{a\pi\sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2}\ t}{6};$$

б) $$u(x, y, t) = \sin\frac{\pi x}{6} \sin\frac{\pi y}{6} \cos\frac{\sqrt{2}\ a\pi t}{6}.$$

2. а) $$u(x, y, t) = \cos\frac{\pi x}{2\ell_1} \sin\frac{\pi y}{2\ell_2} \cos a\pi\sqrt{\frac{1}{4\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2}}\ t;$$

б) $$u(x,y,t) = \frac{8A\ell_1}{\pi^3 a} \sin\frac{\pi y}{\ell_2} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \omega_n} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1} \sin a\pi\omega_n t,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{4\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2}}.$$

3. а) $u(r,\, t) = \dfrac{\upsilon_0 R}{a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_1\left(\dfrac{\mu_n}{2}\right)}{\mu_n^{\;2}\; J_1^{\,2}(\mu_n)} \sin\dfrac{a\mu_n t}{R}\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right);$

б) $u(r,\, t) = \dfrac{2\upsilon_0 R}{a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\mu_n^{\;2}\; J_1(\mu_n)} \sin\dfrac{a\mu_n t}{R}\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right);$

в) $u(r,\, t) = 8A \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\mu_n^{\;3}\; J_1(\mu_n)} \cos\dfrac{a\mu_n t}{R}\, J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right);$

г) $u(r,\, t) = 2R^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu_n^{\;2} - 4}{\mu_n^{\;3}\; J_1(\mu_n)} \times$

$$\times\left[\cos\frac{a\mu_n t}{R} + \frac{R}{a\mu_n}\sin\frac{a\mu_n t}{R}\right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

4. $u(r,\, t) = \dfrac{2PR^2}{T} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\mu_n^{\;3}\; J_1(\mu_n)} \left(1 - \cos\dfrac{a\mu_n t}{R}\right) J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{R}\right).$

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения $\dfrac{1}{a^2} u''_{tt} = u''_{rr} + \dfrac{1}{r} u'_r + \dfrac{P}{T}$ при условиях

$$u(r,\, 0) = 0, \quad u'_t(r,\, 0) = 0,$$
$$u(R, t) = 0.$$

Замечание. В ответах к задачам 3а), 3б), 3в), 3г), 4 значения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Тема 3. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

3.1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим задачу Коши для уравнения распространения тепла в однородном бесконечном стержне: требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$u'_t = a^2\, u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Применив метод Фурье, получим решение уравнения в виде (см. [1], 3.3)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\, ds.$$

Решение типовых задач

1. Решить уравнение $u'_t = a^2\, u''_{xx}$ для следующего начального распределения температуры стержня:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_0, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x < 1,\ x > 3. \end{cases}$$

Решение. Так как $\varphi(x)$ на отрезке $[1,\ 3]$ равна постоянной температуре, а вне отрезка температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{1}^{3} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}}\, ds.$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Действительно, выполняя замену

$$\xi = \frac{x - s}{2a\sqrt{t}}, \qquad s = x - 2a\sqrt{t}\,\xi, \qquad ds = -2a\sqrt{t}\, d\xi.$$

$$s = 1, \qquad \xi = \frac{x - 1}{2a\sqrt{t}}, \qquad s = 3, \qquad \xi = \frac{x - 3}{2a\sqrt{t}},$$

получим

$$u(x, t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-3}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-3}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x, t) = u_0\left[\Phi\left(\frac{x - 1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 3}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Решение, удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 (1 - s)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, ds.$$

Выполняя замену

$$\xi=\frac{x-s}{2\sqrt{t}},\qquad s=x-2\sqrt{t}\ \xi,\qquad ds=-2\sqrt{t}\ d\xi,$$

$$s=0,\qquad \xi=\frac{x}{2\sqrt{t}},\qquad s=1,\qquad \xi=\frac{x-1}{2\sqrt{t}},$$

и пользуясь интегралом вероятностей, получим

$$u(x,\ t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}\left(1-x+2\sqrt{t}\ \xi\right)e^{-\xi^2}\ d\xi=$$

$$=\frac{1-x}{\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}\ d\xi-\int\limits_0^{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}\ d\xi\right)+\sqrt{\frac{t}{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}\ d\left(-\xi^2\right)=$$

$$=(1-x)\left[\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(e^{-\frac{(x-1)^2}{4t}}-e^{-\frac{x^2}{4t}}\right).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти решение задачи Коши

а) $$\begin{cases} u'_t=u''_{xx}, & -\infty<x<\infty, \quad t>0,\\ u(x,\ 0)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ -1, & x<0.\end{cases} \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} u'_t=4u''_{xx}, & -\infty<x<\infty, \quad t>0,\\ u(x,\ 0)=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \end{cases}$$

в) $\begin{cases} u'_t = \dfrac{1}{4} u''_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \end{cases}$

г) $\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x < -1, \quad x > 1. \end{cases} \end{cases}$

д) $\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1 + \dfrac{x}{2}, & -2 \leq x < 0, \\ 0, & x < -2, \quad x > 2. \end{cases} \end{cases}$

Ответы

1. а) $u(x, t) = 2\Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right).$

б) $u(x, t) = x\left[\dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x}{4\sqrt{t}}\right)\right] + 2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{16t}}.$

в) $u(x, t) = 2x\,\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right) + \sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{t}}.$

г) $u(x,t)=2\Phi\left(\dfrac{x+1}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\dfrac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)$.

д) $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)\Phi\left(\frac{x+2}{2\sqrt{t}}\right)-x\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{x}{2}\right)\Phi\left(\frac{x-2}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left[e^{-\frac{(x+2)^2}{4t}}-2e^{-\frac{x^2}{4t}}+e^{-\frac{(x-2)^2}{4t}}\right].$$

3.2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решение типовых задач

1. Дан тонкий однородный стержень $0\le x\le \ell$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если концы стержня $x=0$, $x=\ell$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u(x,0)=\varphi(x)$. Решить задачу в предположении, что $\varphi(x)=u_0=\text{const}$.

Решение. Задача приводится к решению уравнения

$$u'_t=a^2\,u''_{xx},\quad 0<x<\ell,\quad t>0, \tag{3.1}$$

при условиях

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{3.2}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(\ell,t)=0. \tag{3.3}$$

а) Следуя методу Фурье, решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (3.3), будем искать в виде

$$u(x,t)=X(x)\ T(t). \tag{3.4}$$

Подставив функцию (3.4) в уравнение (3.1) и разделив переменные, получим

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = -\lambda = \text{const}.$$

Отсюда следуют задача на собственные значения

$$\begin{cases} X'' + \lambda\, X = 0, \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

и уравнение для функции $T(t)$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{3.6}$$

Для задачи (3.5) собственные значения и соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

При $\lambda = \lambda_n$ для уравнения (3.6) запишем общее решение

$$T_n(t) = A_n\, e^{-a^2\lambda_n t}, \qquad A_n = \text{const}.$$

Подстановка $X_n(x)$ и $T_n(t)$ в (3.4) дает набор решений

$$u_n(x, t) = A_n\, e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

б) Решение задачи (3.1) – (3.3) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \tag{3.7}$$

Определим коэффициенты A_n так, чтобы выполнялось начальное условие (3.2). При $t = 0$ получим

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x).$$

Это соотношение представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, коэффициенты A_n определяются по формуле

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx. \tag{3.8}$$

Итак, решение краевой задачи (3.1) – (3.3) представлено в виде ряда (3.7) с коэффициентами (3.8).

В случае, когда $\varphi(x) = u_0 = \text{const}$, имеем:

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = -\frac{2u_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell} =$$

$$= -\frac{2u_0}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{4u_0}{n\pi}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Окончательно решение примет вид

$$u(x,\,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\,e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2 \pi^2}{\ell^2}t}\,\sin\frac{(2k+1)\pi x}{\ell}.$$

2. Начальная температура стержня $0 \le x \le \ell$ с теплоизолированной боковой поверхностью равна $u_0 = \text{const}$, а на концах его поддерживается постоянная температура $u(0,\,t) = u_1$, $u(\ell,\,t) = u_2$. Найти распределение температуры $u(x,\,t)$ в стержне.

Решение. Задача приводится к решению уравнения

$$u'_t = a^2\,u''_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \tag{3.9}$$

при условиях

$$u(x,\,0) = \varphi(x) = u_0,$$

$$u(0,t)=u_1, \qquad u(\ell,t)=u_2.$$

Функцию $u(x,t)$ будем искать в виде

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+\bar{u}(x),$$

где $\upsilon(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.9) и условиям

$$\upsilon(x,0)=\varphi(x)-\bar{u}(x),$$

$$\upsilon(0,t)=0, \qquad \upsilon(\ell,t)=0,$$

функция $\bar{u}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{u}''=0 \tag{3.10}$$

и ненулевым граничным условиям

$$\bar{u}(0)=u_1, \qquad \bar{u}(\ell)=u_2. \tag{3.11}$$

Общее решение уравнения (3.10) имеет вид

$$\bar{u}=ax+b,$$

где a, b – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий

$$\bar{u}(0)=b=u_1, \qquad \bar{u}(\ell)=a\ell+b=u_2, \quad \Rightarrow \quad b=u_1, \quad a=\frac{u_2-u_1}{\ell}.$$

Тогда решение уравнения (3.10) с условиями (3.11) запишется в виде

$$\bar{u}(x)=\frac{u_2-u_1}{\ell}x+u_1.$$

Функция $\upsilon(x,t)$ определяется формулой (см. 3.2, задачу 1)

$$\upsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\, e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

где $$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left(\varphi(x) - \bar{u}(x)\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Подставляя выражения для $\varphi(x)$ и $\bar{u}(x)$, получим:

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left(u_0 - \frac{u_2 - u_1}{\ell}x - u_1\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\ell}\left(u_0 - u_1\right)\int_0^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx - \frac{2}{\ell^2}\left(u_2 - u_1\right)\int_0^{\ell}x\,\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям

$$u = x, \qquad du = dx,$$

$$dv = \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx, \qquad v = -\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

получим

$$-\frac{2\left(u_0 - u_1\right)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\bigg|_0^{\ell} - \frac{2\left(u_2 - u_1\right)}{\ell^2}\times$$

$$\times\left[-\frac{x\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\bigg|_0^{\ell} + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\bigg|_0^{\ell}\right] =$$

$$= -\frac{2\left(u_0 - u_1\right)}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] + \frac{2\left(u_2 - u_1\right)}{n\pi}(-1)^n =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\left(u_2 - u_0\right)(-1)^n - \left(u_1 - u_0\right)\right].$$

Итак, решение исходной задачи примет вид

$$u(x,\ t)=\frac{u_2-u_1}{\ell}x+u_1+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(u_2-u_0)(-1)^n-(u_1-u_0)}{n}\,e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

3. Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0\le x\le \ell_1,\ \ 0\le y\le \ell_2,\ \ -\infty<z<\infty,$ равна $u_0=\text{const}$. Определить температуру в стержне при $t>0$, если часть поверхности стержня $x=0,\ \ 0\le y\le \ell_2$ теплоизолирована, а остальная часть его поверхности поддерживается при нулевой температуре.

Решение. Задача приводится к решению уравнения

$$u'_t=a^2\left(u''_{xx}+u''_{yy}\right),\quad 0\le x\le \ell_1,\quad 0\le y\le \ell_2,\quad t>0,\qquad (3.12)$$

при условиях

$$u(x,\ y,\ 0)=\varphi(x,\ y)=u_0,$$

$$u'_x(0,\ y,\ t)=u(\ell_1,\ y,\ t)=u(x,\ 0,\ t)=u(x,\ \ell_2,\ t)=0.$$

Схема решения задачи методом Фурье аналогична изложенной в 2.4. Подставим в уравнение (3.12) функцию

$$u(x,\ y,\ t)=\upsilon(x,\ y)\ T(t).\qquad (3.13)$$

Разделяя переменные и учитывая граничные условия, получим

$$\begin{cases}\upsilon''_{xx}+\upsilon''_{yy}+\lambda\upsilon=0,\\ \upsilon'_x(0,\ y)=\upsilon\left(\ell_1,\ y\right)=\upsilon(x,\ 0)=\upsilon\left(x,\ \ell_2\right)=0,\end{cases}\qquad T'+a^2\lambda T=0.\quad (3.14)$$

Полагая $\upsilon(x,y)=X(x)\ Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получим две задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}X''+\nu X=0,\\ X'(0)=X\left(\ell_1\right)=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}Y''+\mu Y=0,\\ Y(0)=Y\left(\ell_2\right)=0,\end{cases}$$

где $\nu+\mu=\lambda$. Собственные значения и соответствующие им собственные функции для этих задач имеют вид

$$\nu_n=\left[\frac{(2n+1)\,\pi}{2\ell_1}\right]^2,\qquad X_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\,\pi x}{2\ell_1},\quad n=0,1,2,\dots,$$

$$\mu_m=\left(\frac{m\,\pi}{\ell_2}\right)^2,\qquad Y_m(y)=\sin\frac{m\pi y}{\ell_2},\qquad m=1,2,\dots .$$

Тогда для задачи (3.14) находим собственные значения и соответствующие им собственные функции

$$\lambda_{nm}=\left[\frac{(2n+1)\,\pi}{2\ell_1}\right]^2+\left(\frac{m\,\pi}{\ell_2}\right)^2,\qquad \upsilon_{nm}=\cos\frac{(2n+1)\,\pi x}{2\ell_1}\,\sin\frac{m\,\pi y}{\ell_2}.$$

Подстановка $\upsilon=\upsilon_{nm}(x,y)$ в (3.13) дает набор решений

$$u_{nm}(x,y,t)=\upsilon_{nm}(x,y)\,T_{nm}(t),$$

где $T_{nm}(t)$ – решение уравнения (3.14) при $\lambda=\lambda_{nm}$:

$$T_{nm}(t)=A_{nm}\,e^{-a^2\lambda_{nm}t},$$

A_{nm} – произвольные постоянные.

Решением задачи является функция $u(x,y,t)$, записанная в виде двойного тригонометрического ряда

$$u(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\,e^{-a^2\lambda_{nm}t}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1}\,\sin\frac{m\pi y}{\ell_2}$$

с коэффициентами

$$A_{nm}=\frac{4}{\ell_1\,\ell_2}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\varphi(x,y)\,\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1}\,\sin\frac{m\pi y}{\ell_2}\,dx\,dy.$$

В случае, когда $\varphi(x,\ y)=u_0=\text{const}$, имеем:

$$A_{nm}=\frac{4}{\ell_1\ \ell_2}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}u_0\ \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1}\ \sin\frac{m\pi y}{\ell_2}\,dx\ \ dy=$$

$$=\frac{4u_0}{\ell_1\ \ell_2}\int_0^{\ell_1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1}\,dx\ \int_0^{\ell_2}\sin\frac{m\pi y}{\ell_2}\,dy=$$

$$=\frac{4u_0}{\ell_1\ \ell_2}\ \frac{2\ell_1\ \ell_2}{(2n+1)m\pi^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1}\bigg|_0^{\ell_1}\ \cos\frac{m\pi y}{\ell_2}\bigg|_0^{\ell_2}=$$

$$=-\frac{8u_0}{(2n+1)m\pi^2}\ \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\left((-1)^m-1\right)=$$

$$=-\frac{8u_0(-1)^n\left((-1)^m-1\right)}{(2n+1)m\pi^2}=\begin{cases}\dfrac{16u_0(-1)^n}{(2n+1)m\pi^2}, & m-\text{нечетное},\\ 0, & m-\text{четное}.\end{cases}$$

Следовательно, $A_{nm}=\dfrac{16u_0(-1)^n}{\pi^2(2n+1)(2m+1)},\quad n,\ m=0,1,\ldots$.

Итак, решение задачи имеет вид

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{16u_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2m+1)}\ e^{-a^2\lambda_{nm}t}\times$$

$$\times\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell_1}\ \sin\frac{(2m+1)\pi y}{\ell_2},$$

где $\lambda_{nm}=\pi^2\left[\dfrac{(2n+1)^2}{4\ell_1^{\ 2}}+\dfrac{(2m+1)^2}{\ell_2^{\ 2}}\right].$

4. Начальная температура однородного шара $0 \le r \le R$ является произвольной функцией $\varphi(r)$. Найти температуру шара при $t > 0$, если поверхность шара теплоизолирована.

Решение. Приходим к краевой задаче: найти функцию $u(r, t)$ такую, что

$$\begin{cases} u'_t = a^2 \left(u''_{rr} + \dfrac{2}{r} u'_r \right), \quad 0 \le r \le R, \quad t > 0, \\ u(r, 0) = \varphi(r), \\ u'_r(R, t) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

а) Подставим в (3.15) функцию

$$u(r, t) = \upsilon(r)\ T(t). \tag{3.16}$$

После разделения переменных получим задачу Штурма-Лиувилля и уравнение для функции $T(t)$:

$$\begin{cases} \upsilon'' + \dfrac{2}{r}\upsilon' + \lambda\ \upsilon = 0, \quad 0 \le r \le R, \\ \upsilon'(R) = 0, \end{cases} \qquad T' + a^2 \lambda T = 0. \tag{3.17}$$

Замена $\omega(r) = r\ \upsilon(r)$ приводит задачу (3.17) к виду

$$\begin{cases} \omega'' + \lambda\ \omega = 0, \\ \omega(0) = 0, \quad \omega(R) = R\ \omega'(R). \end{cases} \tag{3.18}$$

Общее решение уравнения (3.18) имеет вид

$$\omega(r) = C_1\ \cos\sqrt{\lambda}\ r + C_2\ \sin\sqrt{\lambda}\ r.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим

$$\omega' = -\sqrt{\lambda}\ C_1\ \sin\sqrt{\lambda}\ r + \sqrt{\lambda}\ C_2\ \cos\sqrt{\lambda}\ r,$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2\ \sin\sqrt{\lambda}\ R = R\ \sqrt{\lambda}\ C_2\ \cos\sqrt{\lambda}\ R, \end{cases}$$

отсюда следует, что $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\, R = \sqrt{\lambda}\, R$.

Полученное трансцендентное уравнение имеет бесконечно много положительных корней $\lambda_n\left(n = 0, 1, 2, \ldots\right)$, причем $\lambda_0 = 0$. Эти числа – собственные значения задачи Штурма-Лиувилля (3.18), соответствующие собственные функции имеют вид

$$\omega_0\left(r\right) = r, \quad \omega_n\left(r\right) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, r, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.19}$$

Собственные функции задачи (3.17) находим в виде

$$\upsilon_0\left(r\right) = 1, \quad \upsilon_n\left(r\right) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\, r}{r}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

При $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_n\left(n = 1, 2, \ldots\right)$ для уравнения (3.17) запишем решения

$$T_0(t) = A, \quad T_n(t) = A_n\, e^{-a^2 \lambda_n t},$$

где A, A_n – произвольные постоянные. Подставляя в (3.16) υ_0, T_0, υ_n, T_n, получим набор решений

$$u_0(r, t) = A, \quad u_n(r, t) = A_n\, e^{-a^2 \lambda_n t}\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\, r}{r}.$$

б) Будем искать решение краевой задачи (3.15) в виде суммы ряда

$$u(r, t) = u_0(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-a^2 \lambda_n t}\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\, r}{r}. \tag{3.20}$$

Определим постоянные A, A_n так, чтобы выполнялось начальное условие. При $t = 0$ получим

$$u(r, 0) = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\, r}{r} = \varphi\left(r\right)$$

или

$$r\,\varphi(r) = A\,r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, r. \tag{3.21}$$

Равенство (3.21) можно рассматривать как разложение в ряд Фурье на отрезке $[0, R]$ по полной ортогональной системе (3.19) функции $r\,\varphi(r)$. Используя правило разложения (см. [1], 2.3), найдем

$$A = \frac{\int_0^R r^2\,\varphi(r)\,dr}{\int_0^R r^2\,dr} = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2\,\varphi(r)\,dr,$$

$$A_n = \frac{\int_0^R r\,\varphi(r)\sin\sqrt{\lambda_n}\,r\,dr}{\int_0^R \sin^2\sqrt{\lambda_n}\,r\,dr}.$$

Так как

$$\int_0^R \sin^2\sqrt{\lambda_n}\,r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^R \left(1-\cos 2\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr =$$

$$= \frac{R}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,R =$$

$$= \frac{R}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,R\,\cos\sqrt{\lambda_n}\,R.$$

Используя тригонометрические формулы:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\,R = \sqrt{\lambda_n}\,R,$$

$$\sin^2\sqrt{\lambda_n}\ R=\frac{\lambda_n\ R^2}{1+\lambda_n\ R^2},$$

$$\cos^2\sqrt{\lambda_n}\ R=\frac{1}{1+\lambda_n\ R^2},$$

получим

$$\frac{R}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\ \frac{\sqrt{\lambda_n}\ R}{1+\lambda_n\ R^2}=\frac{\lambda_n\ R^3}{2\left(1+\lambda_n\ R^2\right)},$$

тогда

$$A_n=\frac{2\left(1+\lambda_n\ R^2\right)}{\lambda_n\ R^3}\int\limits_0^R r\ \varphi(r)\ \sin\sqrt{\lambda_n}\ r\ dr.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (3.20), получим решение задачи (3.15) в виде

$$u(r,\,t)=\frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2\ \varphi(r)\ dr+\frac{2}{r\,R^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\lambda_n\ R^2}{\lambda_n}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^R r\ \varphi(r)\sin\sqrt{\lambda_n}\ r\ dr\right]e^{-a^2\lambda_n t}\ \sin\sqrt{\lambda_n}\ r.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В полуполосе $0\le x\le \ell,\quad t>0$ для уравнения $u'_t=a^2\ u''_{xx}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

а) $u(x,\,0)=A\ x,$

$u(0,\,t)=u(\ell,\,t)=0.$

б) $u(x,\,0)=A\ x(\ell-x),$

$u(0,\,t)=u(\ell,\,t)=0.$

в) $u(x,0)=x^2-1,$

$u'_x(0,t)=u(1,t)=0,\quad a=1.$

г) $u(x,0)=u_0=\text{const},$

$u'_x(0,t)=u'_x(\ell,t)=0.$

д) $$u(x,0)=\begin{cases} u_0=\text{const}, & 0\le x\le \dfrac{\ell}{2},\\ 0, & \dfrac{\ell}{2}<x\le \ell,\end{cases}$$

$u'_x(0,t)=u'_x(\ell,t)=0.$

е) $u(x,0)=A\,x(\ell-x),$

$u(0,t)=u(\ell,t)=$

$=u_1=\text{const}.$

ж) $u(x,0)=4x,$

$u'_x(0,t)=0,\ u(2,t)=5,\quad a=1.$

з) $u(x,0)=0,$

$u'_x(0,t)=1,$

$u(3,t)=1,\quad a=1.$

2. Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0\le x\le 4,\ \ 0\le y\le 2,\ \ -\infty<z<\infty$, равна $u_0=\text{const}$. Определить температуру в стержне при $t>0$, если температура поверхности стержня поддерживается равной нулю.

3. Начальная температура однородного шара $0\le r\le R$ $u(r,0)=r$. Найти температуру шара при $t>0$, если поверхность шара поддерживается при нулевой температуре.

4. В шаре $0\le r\le R$ найти ограниченные решения $u=u(r,t)$ уравнения $u'_t=a^2\left(u''_{rr}+\dfrac{2}{r}u'_r\right)$, если:

а) $u(r,0)=u_0=\text{const},\qquad u(R,t)=u_1=\text{const}.$

б) $u(r,0)=\varphi(r),\qquad u'_r(R,t)+h\,u(R,t)=0.$

Ответы

1. а) $u(x,t)=\dfrac{2\ell A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\,e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t}\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$;.

б) $u(x,t)=\dfrac{8\ell^2 A}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\,e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{\ell}\right]^2 t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}$;

в) $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}$;

г) $u(x,t)=u_0$;

д) $u(x,t)=\dfrac{u_0}{2}+\dfrac{2u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\,e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{\ell}\right]^2 t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}$;

е) $u(x,t)=u_1+\dfrac{8\ell^2 A}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{\ell}\right]^2 t}\times$

$\times\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}-\dfrac{4u_1}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\,e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{\ell}\right]^2 t}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell}$;

ж) $u(x,t)=5+\dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\,e^{-\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)^2 t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{4}-$

$-\dfrac{64}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\,e^{-\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)^2 t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{4}$;

з) $u(x,t)=x-3+\dfrac{24}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\,e^{-\left(\frac{2n+1}{6}\pi\right)^2 t}\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{6}.$

2. $$u(x,y,t)=\frac{16u_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{4}\,\sin\frac{(2m+1)\pi y}{2}}{(2n+1)(2m+1)}\times$$

$$\times e^{-a^2\lambda_{nm}t};$$

$$\lambda_{nm}=\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{4}+(2m+1)^2\right].$$

3. $$u(r,t)=\frac{2R^2}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^2}\right]e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi r}{R}.$$

4. а) $u(r,t)=u_1+\dfrac{2R(u_0-u_1)}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\,e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t}\sin\dfrac{n\pi r}{R};$

б) $$u(r,t)=\frac{2(1-Rh)}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-Rh-\cos^2\sqrt{\lambda_n}\,R}\times$$

$$\times\left[\int_0^R r\varphi(r)\sin\sqrt{\lambda_n}\,r\,dr\right]\cdot e^{-a^2\lambda_n t}\sin\sqrt{\lambda_n}\,r,$$

где λ_n – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}R=\dfrac{\sqrt{\lambda}R}{1-Rh}.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Романовский Р. К. Лекции по уравнениям математической физики. Уравнения колебаний и диффузии: Учеб. пособие. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2004. 102 с.

2. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики: Учебник для студентов вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996.

3. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985.

4. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.

5. Мисюркеев И. В. Сборник задач по методам математической физики. М.: Просвещение, 1975.

СОДЕРЖАНИЕ